

# **Algorytmy genetyczne**

**(seminarium)**

*prowadzący:* dr inż. Halina Kwaśnicka

*termin:* środa, 11<sup>15</sup> – 13<sup>00</sup>

*data:* 2000.05.10

*autor:*

Marcin Wściubiak

nr ind. 82443

informatyka, semestr 6.

## **Ewolucyjna optymalizacja wielokryterialna**

# 1. Podstawowe pojęcia

Z problemem **optymalizacji wielokryterialnej** mamy do czynienia wówczas, gdy w zadaniu decyzyjnym trzeba jednocześnie uwzględnić kilka funkcji celu.

Możliwe rozwiązania zadania optymalizacji klasyfikuje się jako rozwiązania **zdominowane** i **niezdominowane (paretooptymalne)**.

Dla zadania **maksymalizacji** zestawu  $k$  funkcji celu

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$$

rozwiązanie  $x$  jest **zdominowane**, jeśli istnieje dopuszczalne rozwiązanie  $y$  nie gorsze od  $x$ , tzn. dla każdej funkcji celu  $f_i$

$$f_i(x) \leq f_i(y) \quad (i=1, \dots, k)$$

w przeciwnym wypadku:  $x$  – rozwiązanie **niezdominowane (paretooptymalne)**.

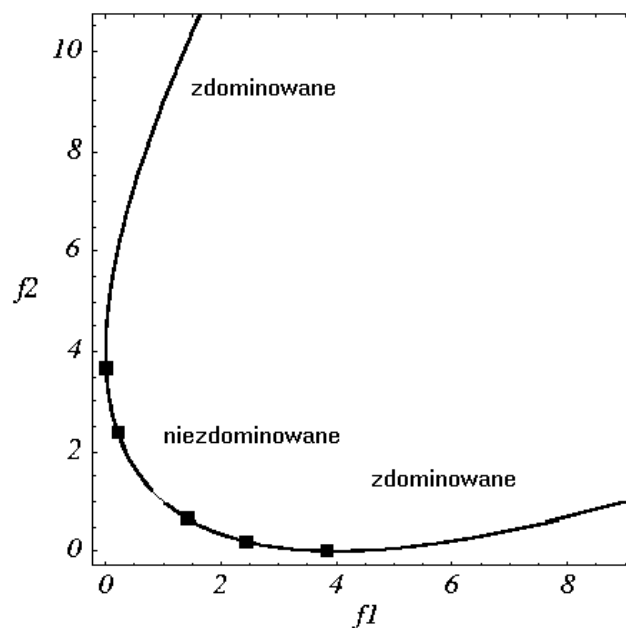
Dla zadania **minimalizacji** zestawu  $k$  funkcji celu

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$$

rozwiązanie  $x$  jest **zdominowane**, jeśli istnieje dopuszczalne rozwiązanie  $y$  nie gorsze od  $x$ , tzn. dla każdej funkcji celu  $f_i$

$$f_i(y) \leq f_i(x) \quad (i=1, \dots, k)$$

w przeciwnym wypadku:  $x$  – rozwiązanie **niezdominowane (paretooptymalne)**.



Rys. 1. Rozwiązania zdominowane i niezdominowane dla zadania minimalizacji.

## 2. Wybrane metody

### Podejścia tradycyjne:

- Metoda ważonych celów (*Weighting Method*)
- Metoda ograniczeń (*Constraint Method*)

### Algorytmy ewolucyjne:

- VEGA: *Vector Evaluated Genetic Algorithm* (Schaffer 1985).
- HLGA: *Hajela's and Lin's Weighting-based Genetic Algorithm* (1992).
- FFGA: *Fonseca's and Fleming's Multiobjective Genetic Algorithm* (1993).
- NPGA: *The Niche'd Pareto Genetic Algorithm* (Horn, Nafpliotis, Goldberg 1994).
- NSGA: *The Nondominated Sorting Genetic Algorithm* (Srinivas, Deb 1994).
- SPEA: *The Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (Zitzler, Thiele 1999).

W niniejszym opracowaniu umieszczono krótki opis metody ważonych celów oraz algorytmów VEGA i SPEA. Dokładne opisy wszystkich wymienionych metod i algorytmów można znaleźć w [1].

### 3. Metoda ważonych celów

Metoda ważonych celów polega na sprowadzeniu zadania wielowymiarowego do zadania jednowymiarowego, tzn. połączeniu poszczególnych funkcji celu  $f_i$  w jedną funkcję celu  $F$ :

$$F(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x)$$

gdzie:

- $k$  – ilość funkcji celu;
- $x$  – wektor rozwiązań;
- $w_i$  – wagi takie, że:

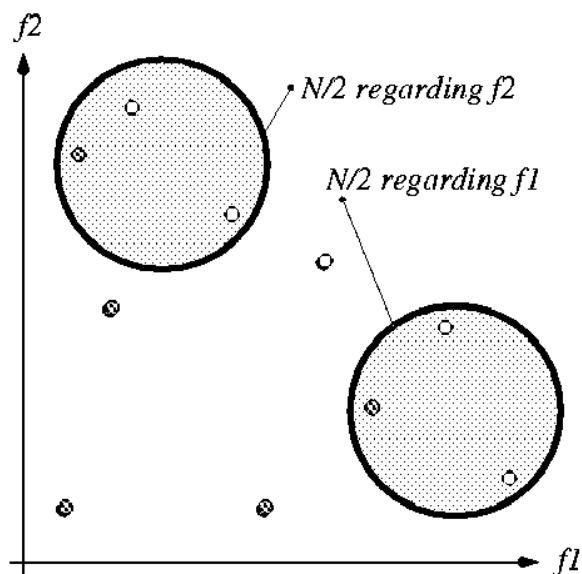
$$w_i \in [0, 1] \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1$$

(różne wektory wag dają różne rozwiązania paretooptymalne)

Uzyskaną w ten sposób funkcję  $F$  optymalizuje się przy użyciu standardowych metod optymalizacji z jedną funkcją celu. Podstawową wadą omawianej metody jest problem w doborze odpowiednich wartości wag dla poszczególnych kryteriów (co wpływa ujemnie na jakość uzyskanych rozwiązań).

## 4. Vector Evaluated Genetic Algorithm

Pomysł, zastosowany w algorytmie VEGA, polega na podziale populacji na  $k$  podpopulacji o jednakowych liczebnościach ( $k$ –ilość celów). Selekcja wewnątrz każdej podpopulacji jest przeprowadzana niezależnie (każda podpopulacja odpowiada za inne kryterium), ale kojarzenie i krzyżowanie przekracza granice podpopulacji (obejmuje całą populację).



Rys 2. Podział populacji na podpopulacje dla dwóch kryteriów.

Podstawową **zaletą** algorytmu jest łatwość w implementacji. Zasadniczą **wadą** jest tendencja do pomijania rozwiązań pośrednich (dobrych ze względu na każde kryterium, ale nie najlepszych ze względu na żadne z nich z osobna).

## Użyte oznaczenia

- $t$  – numer pokolenia  
 $P_t$  – populacja w  $t$ -tym pokoleniu  
 $P'$  – populacja tymczasowa (*mating pool*)  
 $k$  – ilość kryteriów

## Algorytm VEGA

- Parametry wejściowe:  $N$  – rozmiar populacji  
 $T$  – maksymalna ilość pokoleń  
 $p_c$  – prawdopodobieństwo krzyżowania  
 $p_m$  – prawdopodobieństwo mutacji
- Wynik:  $A$  – zbiór rozwiązań niezdominowanych

Krok 1: **Inicjalizacja** (wygenerowanie populacji początkowej  $P_0$ )

Niech  $P_0 = \emptyset$  oraz  $t=0$ . Dla  $i=1, \dots, N$  wykonaj

- Wylosuj osobnika  $i$ .
- Dodaj osobnika  $i$  do zbioru  $P_0$ .

Krok 2: **Wyznaczenie dopasowania i selekcja**:  $P'_t = \emptyset$ . Dla  $i=1, \dots, k$  wykonaj

- Dla każdego osobnika  $i \in P_t$  oblicz jego dopasowanie w oparciu o funkcję celu  $f_i$ .
- Dla  $j=1, \dots, N/k$  wybierz osobnika  $i$  z  $P_t$  i dodaj go do  $P'$ .

Krok 3: **Rekombinacja**: Niech  $P'' = \emptyset$ . Dla  $i=1, \dots, N/2$  wykonaj

- Wybierz dwa osobniki  $i, j \in P'$  i usuń je z  $P'$ .
- Skrzyżuj osobniki  $i$  i  $j$ ; wynik: osobniki  $k$  i  $l$ .
- Dodaj  $k, l$  do  $P''$  z prawdopodobieństwem  $p_c$  (w przeciwnym wypadku do  $P''$  dodaj osobniki  $i, j$ ).

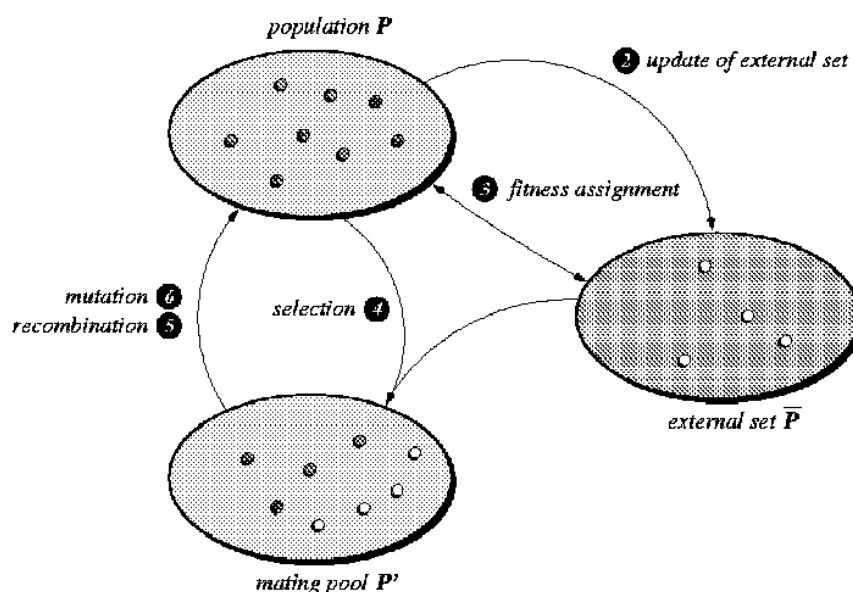
Krok 4: **Mutacja**: Niech  $P''' = \emptyset$ . Dla każdego osobnika  $i \in P''$  wykonaj

- Zmutuj osobnika  $i$  z prawdopodobieństwem  $p_m$ . Wynik: osobnik  $j$ .
- Dodaj osobnika  $j$  do zbioru  $P'''$ .

Krok 5: **Zakończenie**: Niech  $P_{t+1} = P'''$  i  $t=t+1$ . Jeśli  $t \geq T$  to zakończ (wynik:  $A =$  rozwiązania niezdominowane z populacji  $P_t$ ), w przeciwnym wypadku powrót do kroku 2.

## 5. Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Cechą charakterystyczną algorytmu SPEA jest fakt, że osobniki reprezentujące rozwiązania niezdominowane (wśród dotychczas rozważonych rozwiązań) są przechowywane w oddzielnym zbiorze (tzw. zbiór zewnętrzny). Ponadto, wartość przystosowania osobnika należącego do populacji zależy wyłącznie od tego, w jakim stopniu jest zdominowany przez osobniki ze zbioru zewnętrznego; to, czy osobniki z populacji są przez siebie zdominowane, jest nieistotne. Wszystkie osobniki ze zbioru zewnętrznego biorą udział w selekcji. Liczność zbioru zewnętrznego jest redukowana do wymaganej poprzez clustering, bez utraty informacji o przebiegu frontu paretooptimalnego.



Rys. 3. Schematyczny przebieg działania algorytmu SPEA.

Niewątpliwą **zaletą** algorytmu SPEA jest to, że w przeciwieństwie do algorytmu VEGA, algorytm nie pomija rozwiązań pośrednich, dobrze oddając przebieg frontu paretooptimalnego. Zasadniczą **wadą** jest duża złożoność obliczeniowa algorytmu (szczególnie czasochłonna jest procedura wyznaczenia dopasowania osobnika – konieczny jest przegląd zupełny zbioru zewnętrznego).

## Użyte oznaczenia

- $t$  – numer pokolenia  
 $P_t$  – populacja w  $t$ -tym pokoleniu  
 $\bar{P}_t$  – zbiór zewnętrzny (*external set*)  
 $\bar{P}'$  – tymczasowy zbiór zewnętrzny  
 $P'$  – populacja tymczasowa (*mating pool*)

## Algorytm SPEA

- Parametry wejściowe:  $N$  – rozmiar populacji  
 $\bar{N}$  – maksymalny rozmiar zbioru zewnętrznego  
 $T$  – maksymalna ilość pokoleń  
 $p_c$  – prawdopodobieństwo krzyżowania  
 $p_m$  – prawdopodobieństwo mutacji
- Wynik:  $A$  – zbiór rozwiązań niezdominowanych

Krok 1: **Inicjalizacja:** Wygeneruj populację początkową  $P_0$  (patrz krok 1 algorytmu VEGA) oraz pusty zbiór zewnętrzny  $\bar{P}_0 = \emptyset$ . Niech  $t=0$ .

Krok 2: **Uzupełnienie zbioru zewnętrznego:** Niech  $\bar{P}' = \bar{P}_t$ .

- Skopiuj do  $\bar{P}'$  osobniki z populacji  $P_t$ , niezdominowane przez inne osobniki z populacji  $P_t$ .
- Usuń z  $\bar{P}'$  osobniki zdominowane przez inne osobniki z  $\bar{P}'$ .
- Zredukuj licznosc zbioru  $\bar{P}'$  do  $\bar{N}$  przez clustering; wynik:  $\bar{P}_{t+1}$ .

Krok 3: **Wyznaczenie dopasowania:** Oblicz wartość dopasowania  $F$  osobników w  $P_t$  i  $\bar{P}_t$  przy użyciu algorytmu opisanego dalej.

Krok 4: **Selekcja:** Niech  $P' = \emptyset$ . Dla  $i=1, \dots, k$  wykonaj

- Wybierz losowo dwa osobniki  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in P_t + \bar{P}_t$ .
- Jeśli  $F(\mathbf{i}) < F(\mathbf{j})$  to  $P' = P' + \{\mathbf{i}\}$ , w przeciwnym wypadku  $P' = P' + \{\mathbf{j}\}$  (wartość przystosowania jest tu minimalizowana).

Krok 5: **Rekombinacja:** patrz krok 3 algorytmu VEGA (wynik:  $P''$ ).

Krok 6: **Mutacja:** patrz krok 4 algorytmu VEGA (wynik:  $P'''$ ).

Krok 7: **Zakończenie:** Niech  $P_{t+1} = P'''$  i  $t=t+1$ . Jeśli  $t \geq T$  to zakończ (wynik:  $A =$  rozwiązania niezdominowane z populacji  $P_t$ ), w przeciwnym wypadku powrót do kroku 2.



## Wyznaczenie dopasowania w algorytmie SPEA

Każdemu osobnikowi  $\mathbf{i} \in \bar{P}_t$  (należącemu do zbioru zewnętrznego) przypisuje się wartość rzeczywistą  $S(\mathbf{i}) \in [0,1)$ , zwaną **siłą**. Siła osobnika  $\mathbf{i}$  jest proporcjonalna do liczby osobników  $\mathbf{j} \in P_t$  (należących do populacji), reprezentujących rozwiązania zdominowane przez rozwiązanie reprezentowane przez osobnika  $\mathbf{i}$ :

$$S(i) = \frac{n}{N+1}$$

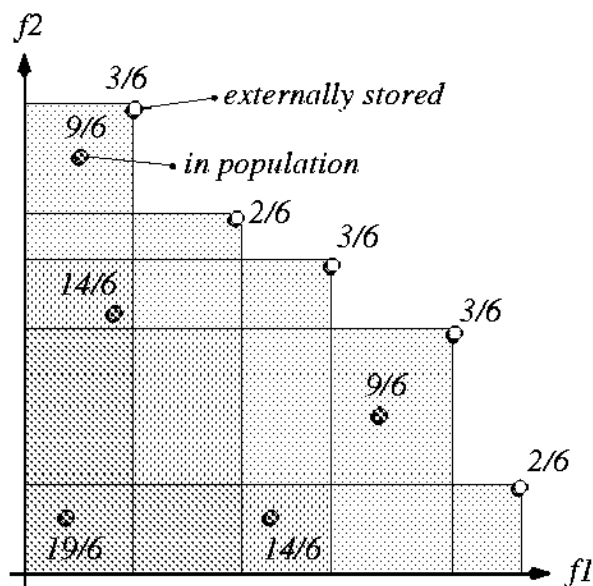
gdzie:

- $S(\mathbf{i})$  – siła osobnika  $\mathbf{i}$
- $n$  – liczba osobników w populacji zdominowanych przez osobnika  $\mathbf{i}$
- $N$  – liczebność populacji

Wartość przystosowania osobnika  $\mathbf{i}$  jest równa jego sile:

$$F(\mathbf{i}) = S(\mathbf{i})$$

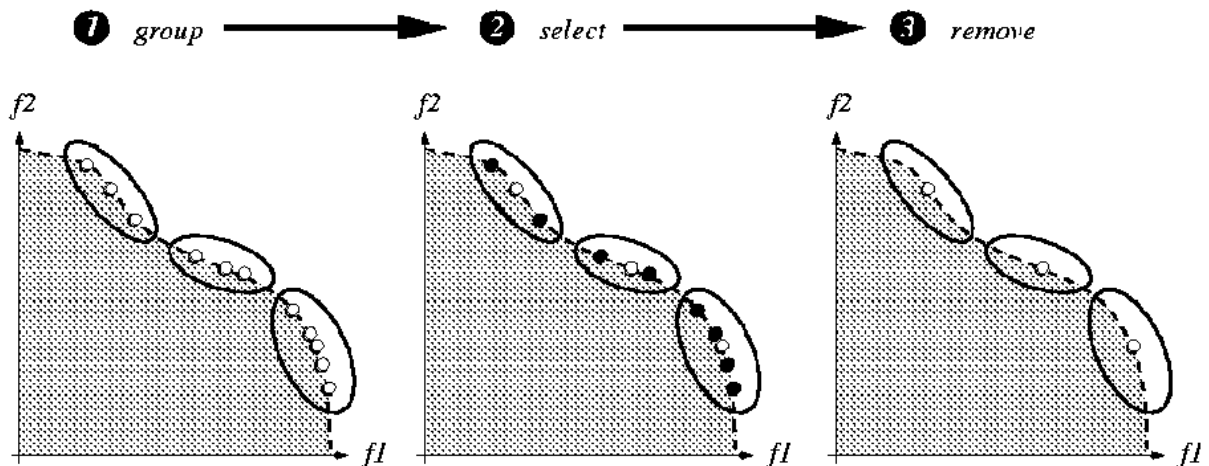
Przystosowanie osobnika  $\mathbf{j} \in P_t$  (należących do populacji) oblicza się jako powiększoną o 1 sumę sił wszystkich osobników  $\mathbf{i} \in \bar{P}_t$  (należących do zbioru zewnętrznego) reprezentujących rozwiązania dominujące nad rozwiązaniem reprezentowanym przez osobnika  $\mathbf{j}$ . Dodanie 1 ma na celu zapewnienie, że osobniki należące do zbioru zewnętrznego  $\bar{P}_t$  będą miały lepszą wartość przystosowania od osobników z populacji  $P_t$ .



Rys. 4. Przykładowe wartości przystosowania dla zadania maksymalizacji.

## Redukcja zbioru zewnętrznego przez clustering

W przypadku, gdy rozmiar zbioru zewnętrznego  $\bar{P}_t$  przekracza dopuszczalną wartość  $\bar{N}$ , konieczne jest jego zredukowanie. Aby nie stracić informacji o przebiegu frontu paretooptimalnego, wybór elementów do usunięcia nie może być przypadkowy. Przebieg kolejnych etapów redukcji zilustrowano i opisano poniżej.



Rys. 5. Redukcja zbioru zewnętrznego przez clustering.

Kolejnymi etapami redukcji zbioru zewnętrznego są:

- zgrupowanie osobników w  $\bar{N}$  klastrów (w obrębie jednego klastra umieszcza się osobniki reprezentujące położone blisko siebie rozwiązania);
- wybór jednego reprezentanta dla danego klastra (najczęściej osobnika położonego w centralnym punkcie klastra);
- usunięcie wszystkich osobników z wyjątkiem wybranych wcześniej reprezentantów poszczególnych klastrów.

## 6. Literatura

- [1] Zitzler E.: *Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications*, Zürich 1999 (praca doktorska).
- [2] Michalewicz Z.: *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, WNT 1999; s. 205–206.
- [3] Goldberg D.: *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*, WNT 1998; s. 212–217.

Pracę doktorską i inne publikacje E. Zitzlera można znaleźć pod adresem:  
<http://www.tik.ee.ethz.ch/~zitzler>

Publikacje dotyczące zastosowań optymalizacji wielokryterialnej:  
<http://www.lania.mx/~ccoello/moo.htm>