Agata Fronczak

Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej

Wykładnicze grafy przypadkowe – sieci o zadanym hamiltonianie

FENS

Polskie Towarzystwo Fizyczne

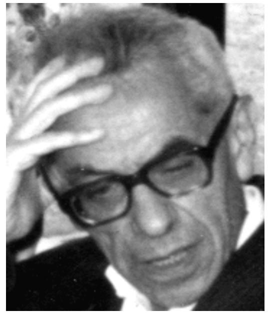
Sekcja Fizyka w Ekonomii i Naukach Społecznych

Klasyczne grafy przypadkowe (grafy Erdösa-Rényiego)

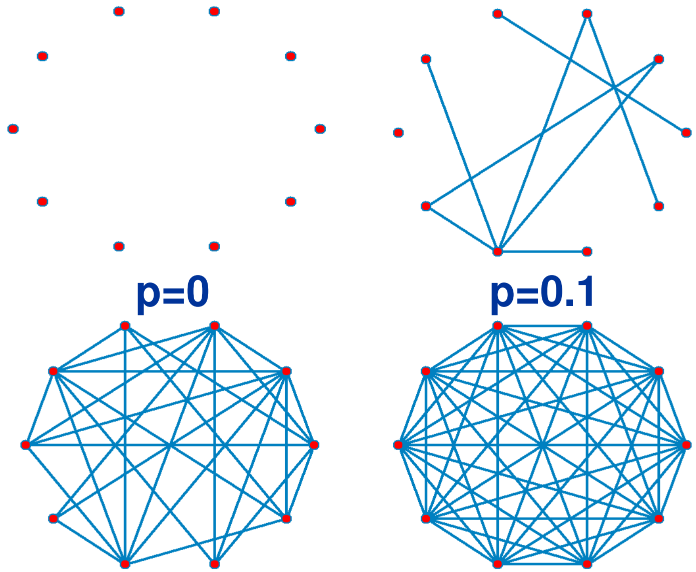
Procedura konstrukcyjna

- Liczba wierzchołków jest stała N, wierzchołki są ponumerowane (tj. rozróżnialne)
- Każda para węzłów jest połączona krawędzią z prawdopodobieństwem p

Paul Erdös
(1913-1996)

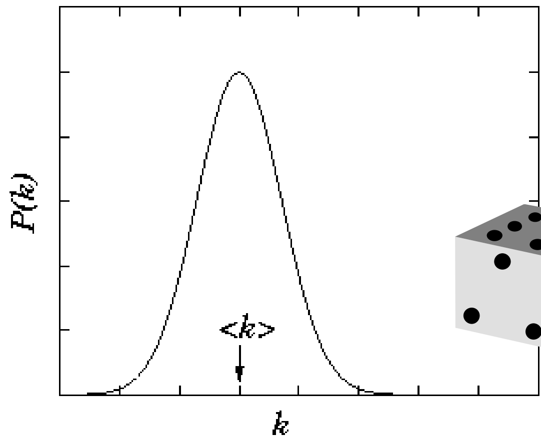


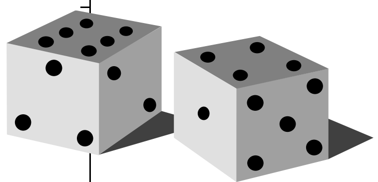
Model demokratyczny - zupełnie losowy



Rozkład stopni wierzchołków

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \approx \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!}$$

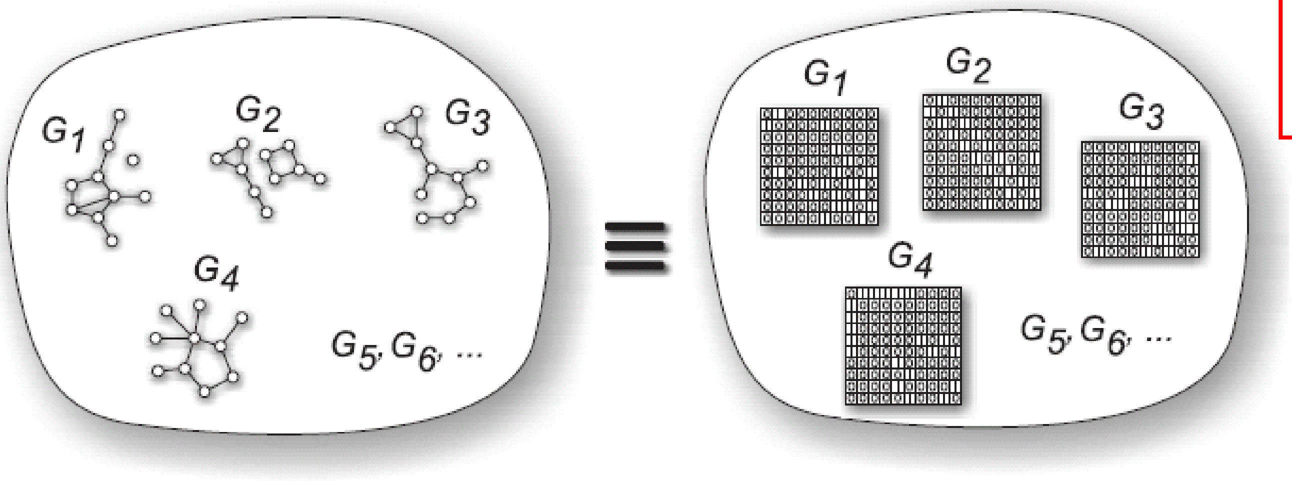




Klasyczne grafy przypadkowe (grafy Erdösa-Rényiego)

Graf ER → Pojedynczy graf, którego procedura konstrukcyjna jest losowa; sieć przypadkowa;

Graf ER → Zbiór grafów, którego elementy można traktować, tak samo jak traktujemy zmienne losowe; elementy tego zbioru mają pewne prawdopodobieństwo realizacji;



$$\boxed{P(G_i) = \frac{e^{-H(G_i)}}{Z},}$$

$$Z = \sum_{G_i} e^{-H(G_i)}$$

Rysunek 4.14. Statystyczna zbiorowość grafów prostych o stałej liczbie wierzchołków N. Grafy proste można przedstawić za pomocą zero-jedynkowych i symetrycznych macierzy sąsiedztwa. Zasada maksymalnej entropii pozwala określić rozkład prawdopodobieństwa $P(G_i)$ w tym zbiorze macierzy w taki sposób, by statystyczny (tj. uśredniony po wielu realizacjach) reprezentant tego zbioru charakteryzował się zadanymi własnościami.

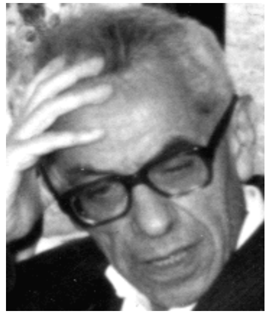
$$\langle E\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{G_i} E(G_i)e^{-\theta E(G_i)} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \theta} = \binom{N}{2}\frac{1}{e^{\theta}+1}.$$

Klasyczne grafy przypadkowe (grafy Erdösa-Rényiego)

Procedura konstrukcyjna

- Liczba wierzchołków jest stała ***N***, wierzchołki są ponumerowane (tj. rozróżnialne)
- Każda para węzłów jest połączona krawędzią z prawdopodobieństwem ***p***

Paul Erdös
(1913-1996)



$$P(G_i) = p^{E(G_i)}(1-p)^{\binom{N}{2}-E(G_i)}$$

$$= \left(\frac{e^{-\theta}}{e^{-\theta}+1}\right)^{E(G_i)}\left(\frac{1}{e^{-\theta}+1}\right)^{\binom{N}{2}-E(G_i)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(G_i) = \frac{e^{-\theta E(G_i)}}{(1+e^{-\theta})^{\binom{N}{2}}}.}$$

$$\Rightarrow \quad P(G_i) = \frac{e^{-\theta E(G_i)}}{Z} = \frac{e^{-H(G_i)}}{Z}, \quad \begin{cases} H(G_i) = \theta E(G_i), \\ Z = (1+e^{-\theta})^{\binom{N}{2}} \end{cases}$$

Hamiltonian to inaczej funkcja CELU

Hamiltonian to inaczej funkcja CELU;

Zwykle naszym celem jest stworzenie sieci o zadanych własnościach;

Grafy wykładnicze – podsumowanie

1. Posługując się modelem eksponencjalnych grafów przypadkowych można konstruować sieci przypadkowe o zadanych parametrach: $\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \ldots$ (np. $l, C, P(k)$).

2. W przypadku parametrów $\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \ldots$ hamiltonian sieci ma postać:

$$H(G) = \alpha A(G) + \beta B(G) + \gamma C(G) + \ldots.$$

3. Parametry $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ są odpowiednikiem zewnętrznych pól (np. T, H) działających na sieć. Ustalając wartości tych pól, wymuszamy odpowiednie wartości średnie parametrów $A(G), B(G), C(G), \ldots$.

4. W tym modelu, prawdopodobieństwo realizacji konkretnej sieci jest równe

$$P(G) = \frac{e^{-H(G)}}{Z}.$$

Oznacza to, że sieci o zadanym hamiltonianie można badać numerycznie wykorzystując znaną metodę Monte Carlo, która próbkuje przestrzeń fazową z prawdopodobieństwem $P(G)$.

Zespół grafów prostych o zadanej sekwencji stopni węzłów (zadanym rozkładzie)

Ensemble grafów prostych o ustalonej sekwencji stopni węzłów

$$\{\langle k_1\rangle, \langle k_2\rangle, \ldots, \langle k_N\rangle\}$$

odpowiednik modelu konfiguracyjnego!!!

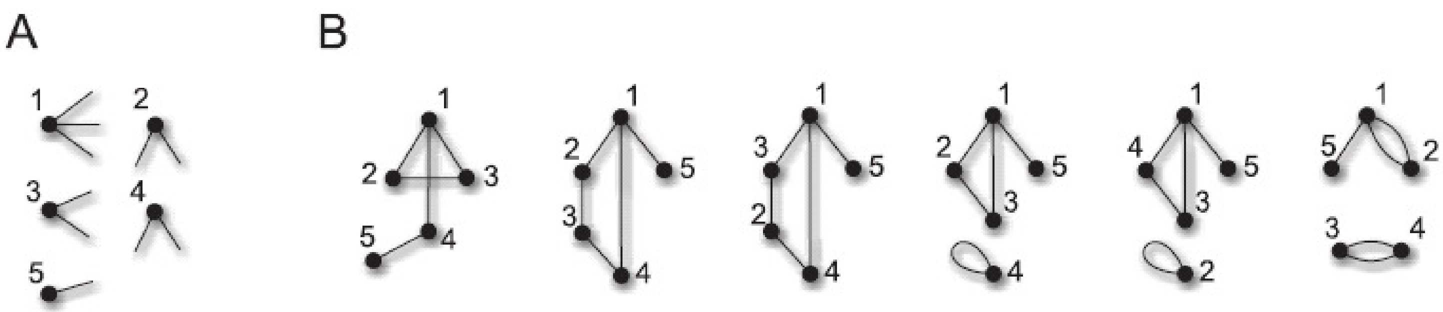
jest równoważny sieciom przypadkowym z ukrytymi zmiennymi (ang. *random networks with hidden variables*).

Hamiltonian sieci ma postać

$$H(G) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i k_i(G)$$

Suma statystyczna Z i energia swobodna Z są równe

$$Z = \prod_{i<j}(1 + e^{\theta_i+\theta_j}), \qquad F = \ln Z = -\sum_{i<j} \ln(1 + e^{-(\theta_i+\theta_j)})$$



Two-star model

PHYSICAL REVIEW E **70**, 066146 (2004)

Solution of the two-star model of a network

Juyong Park and M. E. J. Newman

$$H = -\frac{J}{n-1}\sum_i k_i^2 - B\sum_i k_i$$

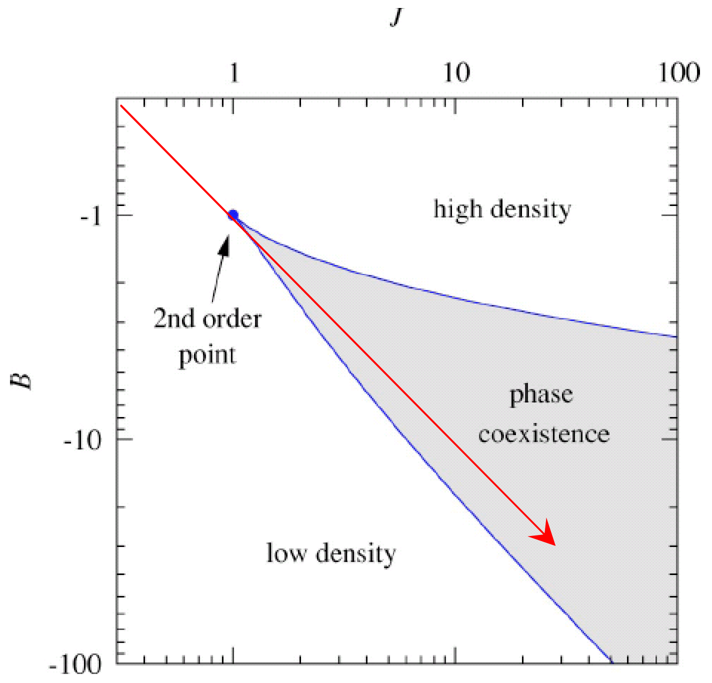


FIG. 3. The phase diagram for the two-star model. The shaded region indicates the hysteretic region in which both high- and low-density phases are possible.

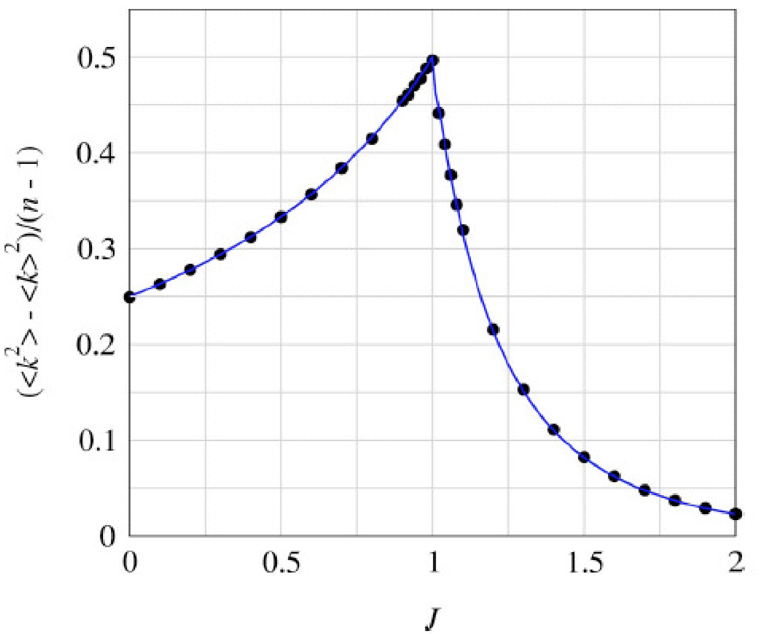


FIG. 2. The variance of vertex degree in the two-star model as a function of the coupling J along the symmetric line $B=-J$. The

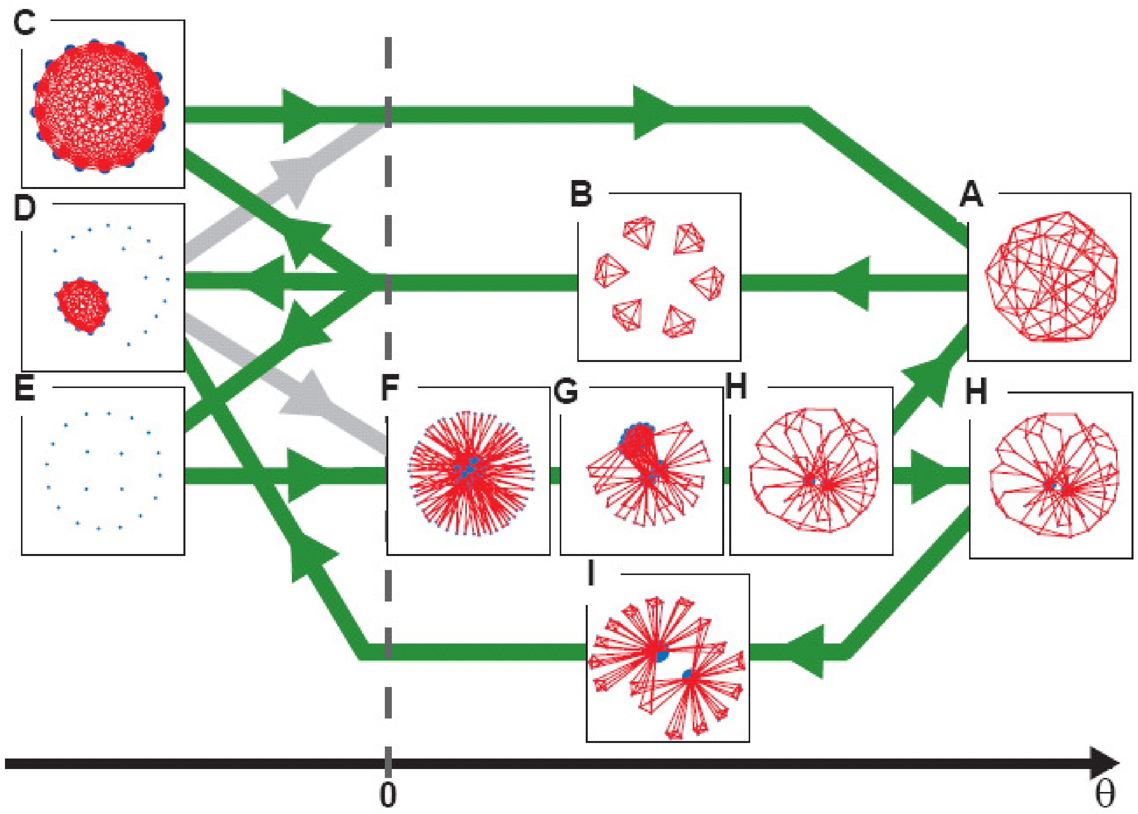
Grafy o zadanej gęstości i współczynniku gronowania

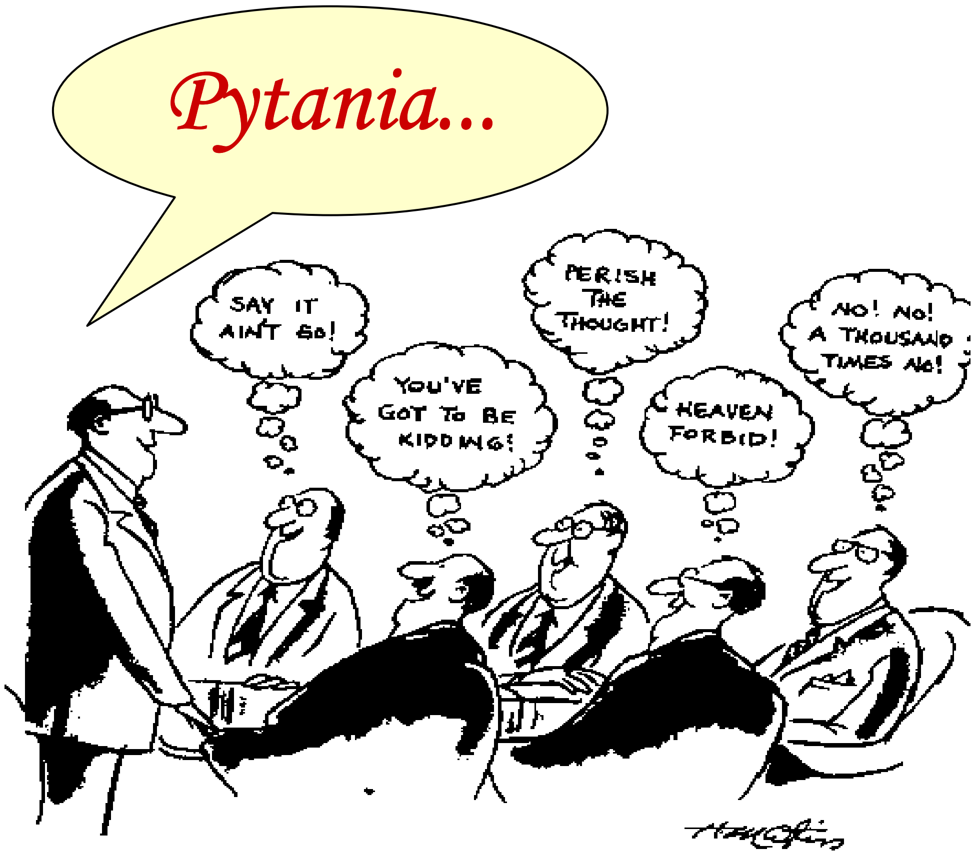
Eur. Phys. J. B **59**, 133–139 (2007)

Phase transitions in social networks

P. Fronczak[a], A. Fronczak, and J.A. Hołyst

$$\boxed{H(G) = \theta m(G) - \alpha C(G)}$$




Pytania...
SAY IT AIN'T SO!
YOU'VE GOT TO BE KIDDING!
PERISH THE THOUGHT!
HEAVEN FORBID!
NO! NO! A THOUSAND TIMES NO!